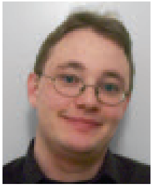
Status på anvendt matematik i det almene gymnasium



Kasper Bjering Søby Jensen,
IMFUFA, RUC.

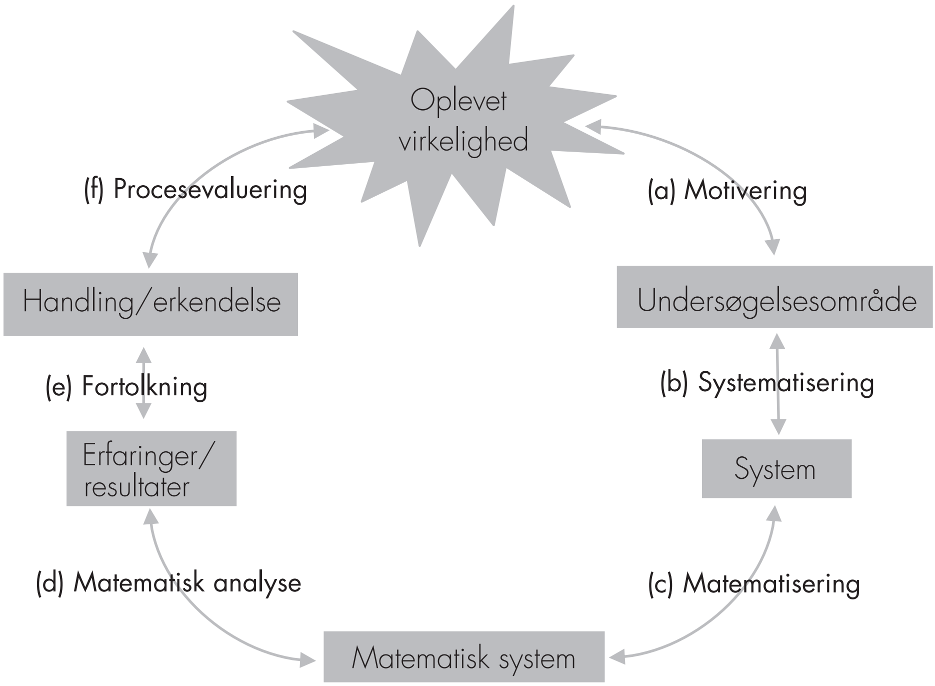
Abstract. *Teksten gør status på i hvilken grad anvendelse af matematik har været en selvstændig pointe i gymnasieskolens matematikundervisning siden gymnasiereformen af 2005. Dette undersøges ved at analysere anvendte opgaver fra de skriftlige eksamenssæt på A-niveauet. Det konkluderes at anvendelse af matematik kun i ringe grad er en egentlig pointe i faget. Der diskuteres forskellige principielle og praktiske grunde til dette.*

Som fag i det almene gymnasium gennemgik matematik store forandringer i forbindelse med gymnasiereformen vedtaget i 2003 og implementeret i perioden 2005-2008. En af disse forandringer var et øget fokus på fagets anvendelse uden for sit eget domæne. Dels gennem deltagelse i (tvær)faglige samspil, men også som central pointe i fagets selvstændige undervisning.

Når læreplanen opremser faglige mål for traditionelle stofområder, tales der således om at kunne "anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller", "anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller", "opstille geometriske modeller" og "demonstrere viden om matematikanvendelse" (UVM, 2010a).

Jeg vil derfor gøre status over hvilken rolle "matematikanvendelse" i dag kan siges at spille i gymnasiefaget. Da de opgaver eleverne forventes at kunne besvare ved den afsluttende skriftlige eksamen, almindeligvis antages at være stærkt dagsordensættende for undervisningen, vil analysen tage afsæt i anvendte opgaver i disse sæt. Med *anvendt* opgave forstås en opgave som i sin formulering refererer til en ikkematematisk *kontekst*. Dette modsat en *ren* opgave.

En anvendt opgave trækker (næsten) altid på en model af noget "virkeligt". En model skabes og anvendes i en modelleringsproces der består af en række forskellige stadier og bevægelser mellem stadier som ofte illustreres med modelleringscyklen (figur 1). En anvendt opgaves besvarelse rummer således en eller flere af disse processer.



Figur 1. *Modelleringscyklen beskriver modellering som seks typer af bevægelse mellem forskellige stadier hvor et ikkematematisk problem oversættes til en matematisk model som giver matematiske svar der oversættes tilbage til svar på det ikkematematiske problem (Blomhøj, 2006).*

Min analyse undersøger hvilke af disse processer der indgår i en opgave. Der tages afsæt i *opgaver med hjælpemidler* i de seks skriftlige A-niveau-eksamenssæt der har været stillet ved afsluttende studentereksamen i maj/juni i perioden 2008-2011 (et sæt i hhv. 2008 og 2009 samt to sæt i hhv. 2010 og 2011).

I de seks eksamenssæt optræder i alt 34 anvendte opgaver ud af 49 i alt. Alle opgaver har et nummer, og i almindelighed vil jeg referere til en specifik opgave med dens år og nummer (fx vil opgave 9 i opgavesættet 2010a hedde “2010a-9”). I tabel 1 er en samlet oversigt over alle 34 anvendte opgaver, fordelt på eksamenssæt og opgavetyper.

Opgavetyperne er defineret ud fra det matematiske indhold i opgaven, overordnet set fordelt på funktioner, differentialligninger, geometri, statistik og beregning, med visse underinddelinger af funktioner og geometri. Opgaverne vil blive analyseret efter typer fordi karakteren af opgaver inden for samme type ofte er den samme. Som et forklarende element i analysen vil jeg løbende give eksempler på omformuleringer af de analyserede opgaver der øger anvendelsesgraden.

Tabel 1. *Oversigt over anvendte opgaver i skriftlige A-niveau-eksamenssæt 2008-2011. I tabelceller findes opgavens nummer.*

Opgavetype/opgavesæt	2008	2009	2010a	2010b	2011a	2011b	Antal af typen
Funktion – givet	15, 17a		11		12	10	5
Funktion – opstil fra data	9	8	14	9	7	9	6
Funktion – opstil fra geometri		13, 14	16	15		14	5
Differentialligning	14, 16	12, 16	15	13	13	13	8
Geometri – trigonometri					9	8	2
Geometri – rumgeometri			9		10	11	3
Statistik	12	10	10		8		4
Beregning	10*						1
Antal anvendte opgaver i sættet	7	6	6	3	6	6	34
Antal rene opgaver i sættet	6	5	4	6	2	2	15

Opgaver med funktioner

Der optræder i alt 16 anvendte opgaver som matematisk handler om at eleven skal arbejde med en funktion. Af disse tager 5 afsæt i et eksplicit givet funktionsudtryk mens de øvrige 11 bygger på at eleven selv opstiller et funktionsudtryk, ud fra enten et datasæt eller en geometrisk situation.

Givet funktionsudtryk

Et eksempel på en opgave med et eksplicit givet funktionsudtryk er følgende (2011a-12):

2011a-12: I en model kan længden af dagen i Anchorage Alaska som funktion af tiden beskrives ved

$$f(t) = 6{,}61 \cdot \sin(0{,}0167t - 1{,}303) + 12{,}2\ ,\quad 0 \le t \le 365$$

hvor $f(t)$ er længden af dagen (målt i timer) til tidspunktet *t* (målt i døgn efter 1. januar 2011).

a) Benyt modellen til at bestemme længden af dagen i Anchorage Alaska til tidspunktet $t = 100$.

b) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor længden af dagen i Anchorage Alaska er størst.

c) Bestem $f'(100)$, og gør rede for, hvad dette tal fortæller.

(Opgavens datakilde: http://aa.usno.navy.mil)

Fra et anvendelsessynspunkt er det centrale om konteksten spiller en rolle i besvarelsen. I den indledende præsentation af funktionsudtrykket er dette ikke vigtigt. At overveje hvad konstanterne betyder, og hvorfor definitionsmængden er afgrænset, ville være spild af tid. Det vigtige er altså at man kan genkende og læse en funktion, ikke at man kan se hvor den kommer fra.

I spørgsmål (a) og (b) skal et dagligdagsudtryk *matematiseres* ind i det givne matematiske system. Dvs. at "bestem længden af dagen til tidspunktet $t = 100$" skal oversættes til "bestem $f(100)$", og "bestem det tidspunkt hvor længden af dagen er størst" til "find maksimumspunktet for $f(t)$". Der er altså grundlæggende tale om at pakke velkendte matematiske typeopgaver ud af deres kontekst-indpakning. Dette kræver ikke refleksioner over konteksten, kun over det rent matematiske.

I spørgsmål (c) er første del af formuleringen rent matematisk. Anden del kan rumme to forventninger. Enten en *fortolkning* af typen "tallet angiver hvor meget dagen tiltager i løbet af døgn nr. 100 efter 1. januar 2011" eller rent matematisk af typen "tallet angiver hældningen for tangenten til funktionens graf i punktet $t = 100$". Hvis det første forventes, vil denne del af opgaven kræve at eleven faktisk forholder sig til konteksten og ikke bare til det rent matematiske.

Selvom man kan argumentere for at både *matematisering* og *fortolkning* indgår i opgaven, så er den væsentligste pointe her at de stillede spørgsmål reelt er uafhængige af konteksten. Samme spørgsmål med samme svar kunne med blot overfladiske ændringer være stillet, selvom konteksten havde været vandstandens variation over et halvdøgn, en svingende fjeder eller noget helt fjerde.

En inddragelse af konteksten i arbejdet med funktionen kunne være i form af følgende (matematisk ækvivalente) spørgsmål: a) Hvor lang forventes dagen at være den 11. april 2011?, b) Beregn $f'(t)$ for den 11. april, og forklar hvad det siger om udviklingen i dagens længde, og c) Hvilken dato er det midsommer? En sådan formulering vil nødvendiggøre at eleven rent faktisk tager stilling til konteksten, inddrager forhold fra konteksten i sit matematiske arbejde og dermed udfolder egentlig *matematisering* og *fortolkning* snarere end udpakning.

Derudover kunne et *modelkritisk* spørgsmål have øget brugen af modelleringscyklen. Den angivne funktion har (formentlig pga. en utilsigtet fejl) ikke en periode på 365, men derimod på 376. Eleven kunne være bedt om at beregne hhv. *f(0)* og *f(365)* og kommentere resultatet (forskellen er ca. 0,2 timer – for *f(465)* ville afvigelsen til den tidligere beregnede *f(100)* være ca. 1,2 timer).

Et andet eksempel på en opgave med et eksplicit givet funktionsudtryk er følgende:

2010a-11: Sammenhængen mellem maksimal relativ vaksthastighed V (målt i døgn^{-1}) og kropsmasse M (målt i gram) for flercellede vekselvarme dyr er givet ved

$$\log V = -1{,}64 - 0{,}27 \log M.$$

a) Bestem V, når $M = 3000$

b) Bestem V som funktion af M

Opgavens datakilde: Kaj Sand-Jensen: Økologi og biodiversitet, Gads forlag, København 2000, ISBN 87-12-03565-3)

Den angivne kontekst er i en opgave af denne type helt overflødig. Opgaven havde været fuldt meningsfuld uden den indledende tekst. Det er således kun opgaven som helhed der er indpakket, mens funktionsudtrykket og spørgsmålene er af ren matematisk karakter. Man kan dog her fremhæve at håndtering af en potenssammenhæng på lineær form er teknisk vigtigt når matematik bruges som værktøj i eksempelvis biologi – altså anvendelse som en implicit pointe.

Af de 5 opgaver baseret på eksplicit givne funktionsudtryk synes 2010a-11 at være den der baserer sig mindst på anvendelse, mens 2011a-12 er den der gør det mest. Af dette følger altså at ingen af de 5 opgaver kan siges for alvor at basere sig på anvendelse af matematik på en kontekst.

Opstil funktionsudtryk fra data

Et eksempel på en af de 6 opgaver hvor eleven forventes at opstille et funktionsudtryk ud fra data, er følgende:

2011b-9: Tabellen nedenfor viser udviklingen i antal landbrugsbedrifter med malkekøer i perioden 1975-2008 i Danmark.

År efter 1975	0	5	15	25	32	33
Antal bedrifter	63200	42400	21500	9800	4900	4500

Det antages, at udviklingen i antal landbrugsbedrifter med malkekøer kan beskrives ved en funktion af typen

$$N(t) = b \cdot a^t \text{ ,}$$

hvor *N(t)* betegner antal landbrugsbedrifter med malkekøer *t* år efter 1975.

a) Benyt tabellen til at bestemme en forskrift for *N(t)*.

Udviklingen i det samlede antal malkekøer i Danmark kan i samme periode beskrives ved funktionen

$$M(t) = 1106 \cdot 0{,}98^t \text{ ,}$$

hvor *M(t)* betegner antal malkekøer (i tusinde) *t* år efter 1975.

b) Bestem halveringstiden for *M(t)*.

c) Bestem forskriften for den funktion *G(t)*, der beskriver udviklingen i det gennemsnitlige antal malkekøer pr. landbrugsbedrift i perioden 1975-2008. Benyt *G(t)* til at bestemme den årlige procentvise stigning i det gennemsnitlige antal malkekøer pr. landbrugsbedrift i perioden 1975-2008.

Det er typisk for disse opgaver at der fra et givet datasæt skal bestemmes en forskrift for en funktion af en eksplicit angivet type. Dertil kommer gerne typespørgsmål om halverings-/fordoblingskonstant for eksponentialfunktion eller %-%-vækst for potensfunktion samt spørgsmål af typen "beregn $f(x_0)$" og "for hvilket x fås $f(x)=y_0$", ofte indpakket i konteksten. Endelig kommer der i nogle af opgaverne spørgsmål om det fundne udtryk og et andet eksplicit givet udtryk (fx skæringspunkt).

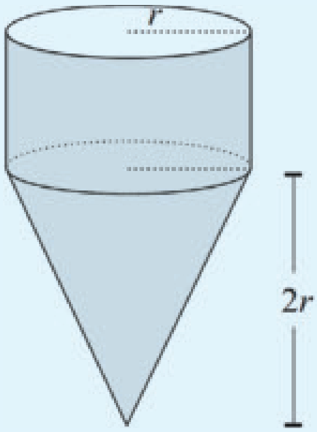
Spørgsmål (c) ovenfor er særligt fordi det ikke er et indpakket typespørgsmål. Eleven må selv reflektere over hvordan udsagnet "det gennemsnitlige antal malkekøer pr. landbrugsbedrift" skal udtrykkes matematisk. Opgave 2011b-9 er derfor et lille skridt i retning af mere anvendthed.

En yderligere anvendelsesorientering kunne ske ved at give et eller flere datasæt og funktionsudtryk samt dertil stille åbne og ikkematematiske spørgsmål. I ovenstående kunne følgende tænkes: "Undersøg og beskriv med matematiske metoder hvordan antallet af danske malkekøer, antallet af bedrifter med malkekøer samt bedrifternes gennemsnitlige størrelse udvikler sig i perioden 1975-2008". Eleven skal så selv forholde sig til hvilke matematiske spørgsmål og svar der er relevante i konteksten.

Opstil funktionsudtryk fra geometri

I alt fem af funktionsopgaverne tager afsæt i opstilling af et funktionsudtryk ud fra geometri. En af disse er nedenstående:

2010b-15: En tragt er sammensat af en åben cylinder og en kegle (se figuren). Keglens grundflade og cylinderen har samme radius r, målt i dm. Keglens højde er det dobbelte af dens radius. Tragten kan rumme 40 dm^3.



Fra formelsamling (Kegle)

h	højde
r	grundfladeradius
Krum overflade	$\pi r \cdot \sqrt{r^2 + h^2}$
Rumfang	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$

a) Bestem cylinderens højde s som funktion af r, og gør rede for, at tragtens overflade O som funktion af r kan beskrives ved

$$O(r) = \pi\left(\sqrt{5} - \frac{4}{3}\right) \cdot r^2 + \frac{80}{r}.$$

b) Bestem r, således at tragtens overflade er mindst mulig, når $0 < r < 4$.

Spørgsmål (a) rummer begge udgaver af hovedindholdet i denne opgavetype. Hovedindholdet er opstilling af en sammenhæng mellem størrelser i en geometrisk figur (længder, areal, volumen). Nogle gange kan det gøres direkte, andre gange må der inddrages en bibetingelse (fx volumenet i ovenstående). Den anden udgave er at man skal udlede et eksplicit angivet udtryk.

Spørgsmål (b) er også normalt. Ofte indgår der en *optimerings*-opgave, hvor der skal findes maksimum eller minimum af enten den tidligere opstillede funktion eller et andet, eksplicit givet udtryk.

Opgaver af denne type adskiller sig fra de øvrige funktionsopgaver på to væsentlige punkter:

1. De er ikke typeopgaver. Det vil sige de er ikke konkrete manifestationer af abstrakt set samme variant (fx "bestem *f(x)*"). De kan derfor ikke løses "på samme måde". Den konkrete opgave må løses fra bunden.
2. De trækker på brug af og regning med bogstaver. Det er således nødvendigt at omgås bogstaver som repræsentanter for størrelser. Først og fremmest i opstillingen af udtrykkene.

Disse to pointer har imidlertid ikke noget med opgavernes anvendelsesorientering at gøre. Fra et anvendelsesperspektiv er disse opgaver rene matematikopgaver som dårligt nok er pakket ind. Konteksten kan alene siges at "legitimere" udseendet af figuren. Skulle konteksten spille en reel rolle, ville det nok være nødvendigt at operere med formuleringer af typen "Hvilket design vil minimere materialeforbruget?" eller lignende. En sådan formulering ses i en enkelt opgave (2009-14).

Opgaver med differentialligning

I alt findes der 8 anvendte opgaver baseret på en ordinær 1.-ordens-differentialligning (alle sæt har mindst én). I 7 af opgaverne gives ligningen eksplicit. Fire af disse (2008-14, 2009-12, 2010b-13, 2011b-13) bygger på en logistisk differentialligning på formen $y' = ay(M-y)$.

De øvrige 3 bygger på lineære differentialligninger. To af disse indeholder en inhomogen differentialligning som er hhv. autonom (2011a-13) og ikkeautonom (2009-16), mens den sidste (2010a-15) rummer to homogene differentialligninger som er hhv. autonom og ikkeautonom.

Et almindeligt eksempel på en opgave med eksplicit givet differentialligning er følgende:

2008-14: I en model kan udviklingen af biltætheden (målt i antal biler pr. 1000 indbyggere) i Danmark i perioden efter 1968 beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dN}{dt} = 0{,}0004 \cdot N \cdot (315 - N),$$

hvor *N* betegner biltætheden til tiden *t* (målt i antal år efter 1968).

a) Bestem en forskrift for biltætheden *N* som funktion af tiden *t*, idet det oplyses, at biltætheden i 1968 var 198.

b) Giv ved hjælp af den fundne funktion et skøn over biltætheden i 2008, og kommentér resultatet.

Opgavens datakilde: Transportrådets Notat 99-02 fra 1999, "Personbilparkens udvikling 1955-2010 – bestand, nybilsalg og ophugning".

Differentialligningen gives typisk på formen $y' = D(y,t)$ eller $y' = D(y)$. Der stilles typisk eksplicit krav om bestemmelse af en løsning $y = f(t)$ der opfylder en betingelse $y_0 = f(t_0)$. Betingelsen indpakkes oftest i konteksten (fx i spørgsmål (a) ovenfor: "biltætheden i 1968 var 198").

Dertil kommer spørgsmål af typerne "beregn $f(t_0)$", "beregn $D(y_0)$", "beregn maksimum af $D(y)$" og "bestem *y* så " $D(y) = y'_0$. Der refereres gerne til *D(y)* med ordet "væksthastighed". Typespørgsmålene pakkes oftest ind som i spørgsmål (b): "Giv ved hjælp af den fundne funktion et skøn over biltætheden i 2008" der skal *matematiseres* til "bestem *f(40)*".

Spørgsmål (b) rummer dog også elementet "kommentér resultatet". Den formulering fandtes i to opgaver i 2008-sættet, men gled derefter helt ud. Idéen her er at eleven skal kunne gennemskue at bilparken i 2008 vil være tæt på sit mætningspunkt. I et senere sæt optræder et spørgsmål (2011b-13) der i ovenstående opgave ville lyde: "Gør rede for hvad tallet 315 fortæller om udviklingen i antallet af biler". Der findes altså enkelte eksempler på *fortolknings*-spørgsmål.

Typespørgsmål udgør indholdet i 6 af opgaverne. Den syvende er lidt anderledes:

2009-16: Et vandbad opvarmes fra 20°C til 100°C. Den indre temperatur (målt i °C) i et bestemt objekt, der befinder sig i vandbadet under opvarmningen, er en funktion *f* af tiden *t* (målt i sekunder). Det oplyses at *f* er en løsning til differentialligningen

$$y' = 0{,}03\left(g(t) - y\right) \ ,$$

hvor *g(t)* er vandbadets temperatur til tiden *t*. Endvidere oplyses det, at til tidspunktet *t* = 0 er objektets indre temperatur 10°C, og at

$$g(t) = 20 + 0{,}25 \cdot t \ , \quad 0 \leq t \leq 320 \, .$$

a) Bestem objektets indre temperatur, når vandbadets temperatur bliver 100°C.

I denne opgave bliver de matematiske spørgsmål mere implicitte end i de tidligere nævnte. Det kræver altså en større grad af *matematisering* at oversætte det anvendt formulerede spørgsmål til et passende matematisk spørgsmål. Fra et anvendelsesperspektiv er der dog stadig tale om begrænset *matematisering* fordi det er et spørgsmål som skal oversættes ind i et givet matematisk system. Et bud på en øget anvendelsesorientering af opgaven er følgende formulering:

Et vandbad er 20 °C varmt. Det opvarmes med konstant varmetilførsel. Fra fysikken ved vi at temperaturen omtrent stiger lineært. I dette tilfælde med 1 °C på 4 sekunder. Vandbadet bliver dog aldrig varmere end 100 °C selvom varmetilførslen fortsættes.

a) Skitsér en graf for vandbadets temperatur i 10 minutter efter at opvarmningen er startet, og opstil et funktionsudtryk for sammenhængen mellem vandets temperatur og tiden.

Et 10 °C varmt objekt nedsænkes i vandbadet ved opvarmningens start. Fra fysikken vides at den hastighed hvormed et objekts temperatur ændrer sig, er proportional med forskellen mellem dets omgivelsers temperatur og dets egen. I dette tilfælde er proportionalitetskonstanten 0,03.

b) Hvilken temperatur forventes objektet at have når vandbadet er 100 °C varmt?
c) Hvornår vil du ud fra modellen mene at objektet kan siges at være 100 °C varmt?

Med begreberne fra modelleringscyklen kan denne opgaveformulering siges at levere en *systematiseret* problemstilling som det er op til opgaveløseren at udføre den fulde *matematisering* af. Der er altså ikke tale om fuldbyrdet modellering, men opgaveformuleringen dyrker trinnene omkring den matematiske analyse i væsentlig højere grad end opgaverne fra de faktiske eksamenssæt.

I den sidste af de 8 opgaver med differentialligninger (2008-16a) gives der en sproglig fremstilling af en logistisk differentialligning, og opgaven er så at skrive ligningen op. Denne type opgave optræder kun denne ene gang. I sig selv er det ikke særlig anvendt, men grundtanken er god og kan nemt udvikles i retning af at matematisere et givet system, i stil med ovennævnte.

Øvrige opgaver

Af de i alt fem anvendte opgaver der optræder inden for emnet geometri, er der to baseret på plangeometri (trigonometri) og tre på analytisk rumgeometri.

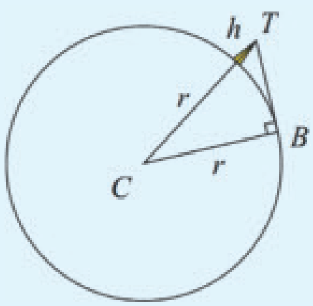
De tre rumgeometriopgaver er alle kendetegnet ved det samme som opgaverne beskrevet i afsnittet om opstilling af funktion med geometri. Anvendelsen er alene en legitimering af den valgte figur, men spiller ingen rolle for besvarelsen af opgaven. De stillede spørgsmål handler således eksplicit om at bestemme planer, linjer og punkter, afstande mellem punkt og plan samt vinkler og afstande mellem planer. Disse opgaver vil ikke blive behandlet yderligere her.

Blandt de plangeometriske opgaver finder man bl.a. følgende:

2011b-8: Højden *h* af verdens højeste bygning er 0,828 km. Sigtelinjen fra toppen *T* af bygningen til horisonten tangerer jorden i punktet *B*. Jordens radius *r* er 6371 km. Centrum af Jorden benævnes *C*.

a) Bestem $\angle TCB$

b) Bestem $|TB|$

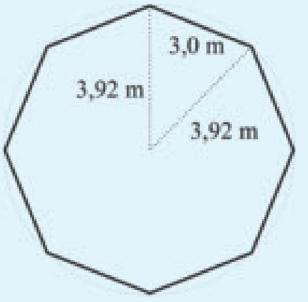


Størrelsesforholdene på figuren er ikke korrekte.

Også for denne opgave synes konteksten at tjene til at "forklare" figuren, men spiller reelt ingen rolle for besvarelsen. Det er ikke engang sikkert eleven tænker over at svaret har en betydning i den virkelige verden. En anvendelsesorientering af denne opgave kunne have været at formulere spørgsmål (b) som "Hvor langt kan man se fra øverste etage i verdens højeste bygning?".

Af den anden plangeometriske opgave bringes her spørgsmål (b).

2011a-9: På figur 2 *[til højre, kbj]* ses fiskerhusets grundflade, der har form som en regulær ottekant.



b) Bestem arealet af fiskerhusets grundflade.

Denne opgave kan udvikles mod højere grad af anvendelse på mindst to måder der evt. kan kombineres. Den første er måden der spørges på. Et anvendelsesorienteret spørgsmål kunne være: "Afhøvling af et gulv koster ca. 100 kr. pr. m^2. Hvad skal fiskeren betale for at få sit gulv afhøvlet?"

Den anden måde er at lave opmålingen af gulvet realistisk, fx lade eleven selv udvælge en størrelse der "måles", og derpå selv udvikle en måde at beregne arealet fra denne måling på. Eleven kan så selv vælge om der laves en konkret beregning eller opstilles et generelt udtryk.

Inden for deskriptiv statistik findes fire opgaver hvor der i alle gives et grupperet observationssæt og afkræves en sumkurve og evt. et kvartilsæt. Derudover skal der gerne bestemmes en procentandel af populationen der rammer skævt i forhold til grupperingen. Igen er der altså ikke tale om egentlig anvendelse af matematik. Der kan dog her tales om anvendelse som en implicit pointe da deskriptiv statistik benyttes inden for mange andre fagområder.

I den sidste anvendte opgave (2008-10) skal eleven ud fra en række taloplysninger foretage en konkret beregning. I det konkrete tilfælde med rentesregning. Der optræder ikke beregningsopgaver i andre opgavesæt, men sådanne kunne være et element i en yderligere anvendelsesorientering.

Diskussion

Sammenfatningen af min analyse er ret enkel. Ud fra de ved skriftlig eksamen stillede opgaver er dét at bringe matematik i anvendelse over for det ikkematematiske ikke en væsentlig pointe i gymnasieskolens matematikfag (men kan naturligvis godt være det i den enkelte lærers undervisning).

De opgaver der alligevel trækker på "anvendt matematik", gør det i overvejende grad ved at pakke rene matematikopgaver ind i en ekstramatematisk kontekst. Dette strækker sig fra at konteksten alene bruges til at legitimere det givne matematiske system, og over til at den bruges som indpakning af matematiske spørgsmål som skal udpakkes ved en art *matematisering*, samt enkelte eksempler på at talværdier skal *fortolkes* ind i konteksten.

Ingen opgaver trækker på bredere brug af modelleringscyklen. Der optræder fx ikke en systematiseret virkelighed som skal matematiseres for at svare på et spørgsmål formuleret i dagligdags sprog. Ej heller optræder der spørgsmål hvor eleven selv med afsæt i den konkrete kontekst må foretage systematisering i form af afgrænsninger, vurderinger, antagelser, estimater mv. Og endelig optræder der ikke spørgsmål hvor eleven skal tage kritisk stilling til modellen i forhold til konteksten.

Dette kan give anledning til en række principielle og praktiske diskussioner. Mest principielt diskussionen om hvorvidt der overhovedet skal arbejdes med anvendt matematik, og i fald der skal, hvad formålet med dette så er.

Konflikten om hvorvidt anvendelse overhovedet er væsentligt for faget, er en *identitets*-konflikt. Det vil sige en uenighed om hvilke objekter og typer af problemstillinger der overhovedet kan behandles inden for rammerne af en matematikundervisning. Denne identitetskonflikt er hovedtema i min almindelige forskning og vil ikke få mere opmærksomhed her.

Antaget at anvendelse skal spille en rolle, åbnes diskussionen om *hvorfor*. Hvis formålet er faktisk at forberede eleverne kompetencemæssigt til at omgås anvendt matematik (aktivt selv at anvende matematik såvel som kritisk analysere andres brug), så bør undervisningen bringe eleverne ud i arbejdet med "fuldbyrdet modellering".

Dette sker mest udfoldet ved at arbejde med på hvilke måder matematik kan indgå i belysningen af åbne problemer fra en ikkematematisk kontekst (se udfoldet diskussion af dette i Jensen (2009)). Eksempler på konkrete problemstillinger kan være:

- Hvor højt kan man springe i stangspring?
- Hvordan udvikler befolkningen sig i et land med etbarnspolitik?
- Hvor tidligt om morgenen står planeten Venus op?
- Hvor langt væk kan man se?
- Hvad er den bedste transportform?
- Hvordan skal en mælkekarton designes?

Ønsker man at brugen af modelleringscyklen skal udfoldes, må man således tilpasse eksamensindholdet efter det. Det kan dels være ved at stille fulde modelleringsopgaver eller som minimum ved at opgaverne reelt udfordrer andre processer fra modelleringscyklen end *matematisk analyse*. Det væsentlige er at indholdet matcher ambitionen.

Et andet formål med "at anvende matematik" kan være at anvendt indpakning er et godt salgsargument. Det gælder såvel over for elever der har svært ved at finde motivationen til at lære matematik, som over for samfundet der savner begrundelser for hvorfor der bør undervises i matematik. Dertil kommer pædagogiske argumenter om at anvendelser illustrerer den matematiske teori på en mere begribelig måde.

Uanset hvad begrundelsen er, savner jeg at denne artikuleres eksplicit og følges af en diskussion om hvordan den opfyldes. Hvis man ser på det officielle syn på anvendelsers rolle, er det blevet mere ambitiøst i retning af aktiv anvendelse. I den første officielle vejledning til den nye læreplan, udsendt i 2008, hed det om "anvendelser af matematik":

> "At demonstrere viden om matematikanvendelse betyder, at man på reflekteret vis kan præsentere et stof, man har arbejdet med. <u>Der ligger således ikke heri en forestilling om, at eleverne selvstændigt kan tage fat på en matematisk problembehandling</u> og modellering af et materiale eller en problemstilling, der foreligger i umiddelbar og ubearbejdet form … <u>man kan ikke forvente, at eleverne opnår en egentlig rutine i matematisk modellering</u> af komplekse problemstillinger" (UVM, 2008, s. 22, min understregning)

Læser man i den nugældende vejledning, udsendt i 2010, hedder det om "matematisk modellering":

> "Når matematikken bringes i spil og anvendes til behandling af anliggender uden for matematikken selv, sker dette gennem *en aktiv modelbygning eller modellering*." (UVM 2010b)

I forlængelse af dette gennemgås fem aspekter af en modelleringsproces der på væsentlig vis minder om modelleringscyklen. 2010-formuleringen virker altså mere ambitiøs hvad angår forventningerne til elevernes arbejde med anvendelse og modellering. Dette synes dog ikke at afspejle sig i anvendelsesgraden i de seneste års eksamensopgaver.

En anden principiel uenighed kan bestå i om en model opfattes som en matematisk struktur der potentielt kan anvendes i mange sammenhænge, eller om en model altid er en sammenknytning af noget ikkematematisk med noget matematisk (Niss, 1987, s. 15-16). Undervisningsvejledningen synes at basere sig på den sidste position, og eksamensopgaverne på den første. Dette ses ved at mange af de anvendte eksamensopgaver bygger på at undersøge bestemte matematiske typestrukturer mens det ingen rolle spiller hvad det er de repræsenterer.

Ud over det principielle er der formentlig også mange praktiske forhold der spiller ind. Først og fremmest det forhold at vi nu engang har de lærere, de elever og de ressourcer vi har. Og en høj grad af fokus på (ægte) anvendelse og modellering udfordrer os på alle tre punkter.

I min forskning støder jeg jævnligt på lærere der føler at deres kompetencer ikke rækker til aktivt selv at anvende matematik på verden i almindelighed og dermed slet ikke til at undervise deres elever i at gøre det. Årsagen er at anvendelse af matematik kræver en vis grad af vidensbaseret omgang med de objekter man skal modellere.

Personligt tror jeg ikke på at mennesker med en lang teoretisk uddannelse i almindelighed skulle være afskåret fra at kunne omgås viden inden for en bred vifte af områder uden for deres eget fag. Derfor er jeg overbevist om at der her mest er tale om en kulturel barriere der kan overvindes med oplysning, faglig debat, efteruddannelse og træning.

Jeg synes endvidere blandt matematikfagpersoner at støde på to *eksamensopgavedogmer* som stiller sig i vejen:

1. Besvarelsen af en matematikopgave må ikke, selv på den mest banale måde, forudsætte paratviden fra verden uden for matematikken.
2. Vurderingen af en besvarelse af en matematikopgave skal være objektiv og indiskutabel og må derfor ikke bygge på faglige skøn.

Dogme 1 står i en uløselig modstrid med et ønske om at lave ægte anvendelse af matematik – i hvert fald i den betydning af ordet jeg lægger op til. Eleven må nødvendigvis skulle forholde sig til noget andet end matematik hvis matematik skal anvendes til andet end sig selv.

Men denne "forholden sig" kan sagtens have karakter af estimater, antagelser og gæt. Det at lave sådanne er i sig selv et væsentligt aspekt af matematikanvendelse. Det centrale er derfor elevens evne til at eksplicitere sine forudsætninger, snarere end elevens konkrete viden og erfaring.

Dette leder dog direkte videre til dogme 2. Hvis elever skal lave individuelle selvstændige antagelser, bliver besvarelsen jo også individuel. Vurderingen af en besvarelse kan således ikke reduceres til alene at være optælling af point tildelt efter indiskutable kriterier. Den må bero på et fagligt skøn.

Mange matematikfagpersoner synes at have et problem med dette. Ofte eksplicit begrundet i overvejelser om retfærdighed for eleverne, men måske også implicit i mere kulturelle forhold som vane og magelighed (det system vi kender, er bare nemmere at håndtere).

En afart af dogme 2 finder man i udsagn om at anvendelsesorienterede spørgsmål er for svære. For mange elever vil dumpe. Til det er der to indvendinger. For det første behøver alle opgaver i et eksamenssæt jo ikke at være af samme art (sådan som de i udpræget grad er i dag). Der kan være et antal opgaver af mere traditionel art hvis besvarelse i sig selv er nok til at bestå.

For det andet bestemmer vi jo selv hvornår en besvarelse af en opgave er "dumpet". For en åben anvendt opgave vil et sådant niveau kunne ligge allerede ved evnen til at komme med løse overvejelser om matematikkens mulige rolle. Men det vil i høj grad basere vurderingen på et fagligt skøn.

De to opgavedogmer finder ingen særlig faglig begrundelse i matematikfaget. De er først og fremmest udtryk for en vaneforestilling. Skulle de to dogmer implementeres i eksempelvis skriftlig dansk, måtte eksamen have form af en retstavningsprøve. Måske er det netop hvad vi gør i matematik. Frem for at udfordre elevernes evne til kreativ tænkning og rationel refleksion tjekker vi kun om de har lært at stave rigtigt.

Denne analyse har ikke til formål at agitere for at gymnasiematematikfaget skal være radikalt anderledes end det er. Men den har til formål at sige at vi ikke skal bilde os selv og hinanden ind at vi gør noget vi ikke gør. Og at vi ikke gør det fordi det er principielt umuligt. Forhåbentlig kan analysen sparke lidt gang i diskussionerne om hvad matematik også kan være.

Referencer

De eksamenssæt der refereres til i analysen, kan alle findes på Undervisningsministeriets hjemmeside, www.uvm.dk. Dér findes også opgavesæt fra de årlige skriftlige eksamener i august og december.

Blomhøj, M. (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. I: M. Blomhøj & O. Skovsmose (red.), *Kunne det tænkes? – Om matematiklæring* (s. 80-109). Malling Beck.

Jensen, T.H. (2009). Modellering versus problemløsning – om kompetencebeskrivelse som kommunikationsværktøj. *MONA, 2009(2)*, s. 37-55.

Niss, M. (1987). *Aims and Scope of Application and Modelling in Mathematics Curricula*. Manuskript fra plenumforedrag på ICTMA3. Tekster fra IMFUFA, 145. Lokaliseret den 20. september 2011 på http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/145.pdf.

UVM – Undervisningsministeriet. (2008). *Matematik A – stx, Undervisningsvejledning, juli 2008*. 2. udgave. Lokaliseret den 20. september 2011 på www.uvm.dk.

UVM – Undervisningsministeriet. (2010a). *Matematik A – stx, juni 2010*. Bilag 35 i: Bekendtgørelse om uddannelsen til studentereksamen. Lokaliseret den 20. september 2011 på www.retsinformation.dk.

UVM – Undervisningsministeriet. (2010b). *Matematik A – stx, Vejledning / Råd og Vink, Gymnasieafdelingen 2010*. Lokaliseret den 20. september 2011 på www.uvm.dk.

Abstract

This text examines the current state of applied math as an independent point in the math teaching in Danish general upper secondary school. This is examined by analyzing applied tasks in the written examinations on the highest level. It is concluded that application of mathematics only to a very limited degree is an independent point. Several principal and practical reasons for this are discussed.