Didaktiske miljøer for ligedannethed

Carl Winsløw
Center for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet

Hensigten med denne artikel er at præsentere nogle praksisorienterede hovedpunkter fra teorien om didaktiske situationer i matematik. Ud fra et eksempel introduceres begreberne didaktisk situation og didaktisk miljø og deres praktiske betydning i design af undervisning på forskellige niveauer af skolesystemet. Hovedparten af artiklen handler om en klassisk situation udviklet af Brousseau til brug på grundskolens mellemtrin, men til slut antydes det hvordan situationens matematiske tema – i mere tekniske forklædninger – dukker op i gymnasiet og på universitetet, og hvordan man også der kan have glæde af teorien som matematikdidaktisk arbejdsredskab.

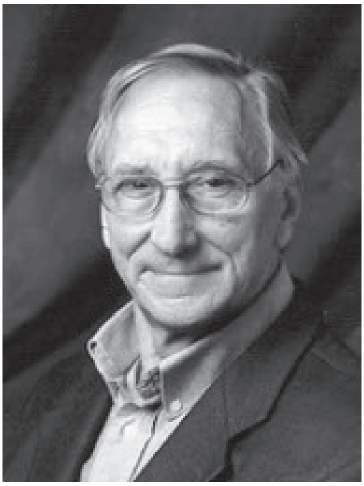
Introduktion

Hvordan kan vi som matematiklærere gøre matematikken mere levende for vores elever og studerende – og hjælpe dem til en dybere og mere anvendelig indsigt i faget? Det siger sig selv at der ikke er generelle og "nemme" svar. Men der findes faktisk overordnede, forskningsbaserede modeller som kan bruges i praksis – og som kan beskrives ud fra konkrete eksempler.

I denne artikel vil jeg slå et slag for en sådan "metode" af fransk oprindelse, nemlig Teorien om didaktiske situationer (herefter TDS), der er udviklet inden for de sidste 35 år, hovedsageligt i Frankrig. At der er tale om en "teori", betyder i dette tilfælde at TDS er et system af modeller og begreber som kan bruges på mange forskellige typer matematikundervisning – og til at *designe matematikundervisning*. Teorien er ikke et skrivebordsprojekt. TDS er *udviklet på basis af observationer og eksperimenter i praksis*. Jeg vender tilbage til denne pointe i afsnittet "Didaktisk ingeniørarbejde".

Guy Brousseau

Ophavsmanden til TDS, Guy Brousseau, blev som den første tildelt Felix Klein-medaljen for livslang indsats i matematikkens didaktik. Overrækkelsen fandt sted i København under den 10. verdenskongres om matematikundervisning (ICME 10) i juli 2004. Man kan få et indtryk af hvilken status TDS har internationalt, gennem følgende uddrag af udvælgelseskomiteens begrundelse:



Guy Brousseau.

> Fra begyndelsen af halvfjerdserne fremstod Guy Brousseau som en af de ledende og mest originale forskere i det nye matematikdidaktiske område, og han var overbevist om at dette område på den ene side skal udvikles som et egentligt forskningsfelt, med både grundforsknings- og anvendelsesdimensioner, og på den anden side skal forblive tæt knyttet til matematik som disciplin. Hans bemærkelsesværdige teoretiske præstation var udviklingen af teorien om didaktiske situationer, en teori som han grundlagde i de tidlige halvfjerdsere, og som han fortsatte med at udvikle med usvækket energi og kreativitet. På et tidspunkt, hvor det dominerende synspunkt var det kognitive, stærkt påvirket af Piagets epistemologi, fremhævede han at det som områdets udvikling krævede ikke var en rent kognitiv teori, men en teori som også tillader os forstå de sociale samspil mellem elever, lærere og viden i klasseværelset, som betinger hvad eleverne lærer og hvordan det kan læres. Det er målet for teorien om didaktiske situationer, som gennem en fortløbende modning er blevet den imponerende og komplekse teori den er i dag. Det var selvfølgelig et arbejde som blev udført i et større fællesskab, men hver gang der var væsentlige fremskridt, var den afgørende kilde Guy Brousseau. (ZDM, 2004; oversat fra engelsk af CW)

Generelt om TDS

TDS anvendes i dag af mange matematikdidaktikere i og uden for Frankrig og i et vist omfang også af forskere i naturfagenes didaktik. Hvad der måske er lige så interessant, er at TDS i den fransktalende verden har opnået en ret stor indflydelse i skolesystemet, ikke mindst i kraft af udbredelsen gennem læreruddannelse, men også ved systematisk formidling direkte til undervisere af visse af dens metoder, begreber og designs.

Når TDS ikke endnu har fundet den store udbredelse i Skandinavien, kan det skyldes flere ting. Brousseaus originaltekster (hvoraf en del er oversat til engelsk, se Brousseau, 1997) anses i almindelighed for at være relativt svært tilgængelige. Det har formentlig også spillet en rolle at store dele af litteraturen kun er til rådighed på fransk; men i de seneste 10 år er der faktisk publiceret ganske meget på engelsk om TDS. På dansk findes der indtil videre kun ganske få publikationer som bruger eller præsenterer TDS (fx Blomhøj, 1995; Winsløw, 2004, 2006). En anden barriere kan være en vis orientering mod England og USA. TDS tager nemlig et radikalt anderledes udgangspunkt end store dele af den angelsaksiske forskningstradition. Det vil jeg nu uddybe lidt.

Udgangspunktet for TDS er *epistemologisk* (vedr. viden og erkendelse), snarere end psykologisk eller "pædagogisk". TDS drejer sig altså ikke om at undersøge eller fremme bestemte *former* eller *pædagogiske dagsordener* i undervisningen eller om at undersøge fx de *kognitive forhindringer* for læring af visse faglige principper. I stedet undersøges de betingelser som er specifikke for undervisning i bestemte matematikfaglige vidensområder. Et af Brousseaus klassiske studier drejer sig således om et eksperimentelt design for indføring i sandsynlighedsregningens og statistikkens grundbegreber (se Brousseau et al., 2001). I denne artikel vil jeg præsentere brugen af TDS i forbindelse med et tema fra geometrien.

Matematikken bag forstørrelse

Som nævnt vil jeg introducere TDS på basis af en konkret undervisningssituation, udviklet og afprøvet af Guy Brousseau og hans medarbejdere i 70'erne. Design og analyse af en undervisningssituation tager, i TDS, udgangspunkt i en dybere analyse af den tilsigtede faglige viden. I overensstemmelse hermed vil jeg – før beskrivelsen af undervisningssituationen – sige lidt om dens matematikfaglige baggrund.

Forstørrelse i dagligdagen

Alle kender til fænomenet "forstørrelse" i en lang række sammenhænge, specielt forstørrelse af to-dimensionelle objekter. Man kan forstørre et hvilket som helst dokument på de fleste kopimaskiner, normalt ved at angive den ønskede forstørrelse i procent. Man kan få lavet forstørrelser af sine fotografier – eller selv lave dem på sin computer. I forbindelse med elektroniske kort kan man ofte "zoome ind" på et område af kortet som man så ser i en slags forstørrelse (svarende til en mindre målestok). Man kan også gå den modsatte vej – det kalder vi så "formindskelse".

Når vi taler om forstørrelse og formindskelse af noget, er det underforstået at dette "noget" i en eller anden forstand er det samme – vi får det blot i forskellige størrelser. Logoet for MONA findes i to forskellige størrelser på side 1 og 2 i bladet, men vi taler netop om logo*et*. Men i hvilken forstand er de to udgaver "ens"?

Ligedannede trekanter

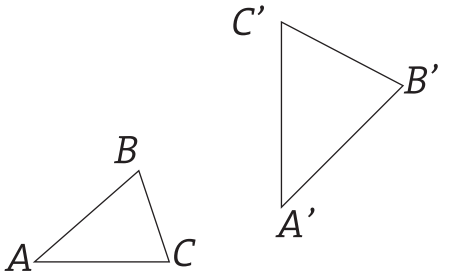
Læserne af MONA er næppe i tvivl: Der er tale om et matematisk fænomen, nemlig *ligedannethed*. For polygoner i planen kan dette defineres vha. polygonens vinkler (essentielt: De er *ens* i ligedannede polygoner). For mere generelle figurer kan man definere ligedannethed af to figurer vha. afbildninger i planen (essentielt: Eksistens af en lineær, vinkelbevarende afbildning som afbilder den ene figur over på den anden). Denne definition har også den fordel at afbildningen bestemmer hvilke stykker der skal betragtes som "tilsvarende". Men den kræver naturligvis en mere avanceret matematisk baggrund.

I praksis kan man ofte reducere ligedannethed til noget der angår trekanter, simpelthen ved at inddele sine figurer i trekanter (triangulering); to trekanter kaldes ligedannede hvis de har de samme vinkler. Dermed er følgende sætning, der har været kendt siden oldtiden, en fundamental viden om ligedannethed i det hele taget:

Thales' sætning. To trekanter er ligedannede hvis og kun hvis deres sidelængder er proportionale. Mere præcist, to trekanter *ABC* og *A'B'C'* er ligedannede hvis og kun hvis

$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \quad \text{og} \quad \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

(Euklid, 1904, bog VI, afsnit 4 og 5)



Sætningen og dens varianter tilskrives undertiden Thales, selvom der faktisk ikke er noget historisk belæg for at gøre det (jf. Euklid, 1994, s. 161).

Det mest interessante i ovenstående sætning er at hvis to trekanter faktisk *er* ligedannede, så har vi det samme forhold mellem to par af ensliggende sider (også kaldet *målforholdet*). Sagt mere populært: Man forstørrer ved at gange længderne af tilsvarende stykker med en fast faktor; alle længderne i den forstørrede figur står derfor i samme forhold til de tilsvarende længder i den oprindelige figur.

Begrebet målforhold er således nært knyttet til ligedannethed: Hvis S og T er to ligedannede figurer, findes der et positivt tal k (målforholdet mellem S og T) således at hvis s og t er to ensliggende stykker i hhv. S og T, så er længden af t lig med k gange længden af s. Tilfældene $k < 1$, $k = 1$ og $k > 1$ svarer til at T er "mindre end", "kongruent med" og "større end" S. Dette gælder endda i en mere generel sammenhæng end polygoner. Når vi vælger at formindske til 71 % på kopimaskinen, bliver alle længder (også de "krumme") på kopien 0,71 gange længden af de tilsvarende stykker på originalen.

Officiel og personlig matematisk viden

Ovenstående kortfattede præsentation kan naturligvis præciseres yderligere i en officiel matematisk forstand (og det på forskellige matematiske baggrunde). Som læseren nok har bemærket, indeholder præsentationen en blanding af generel og mere praktisk viden. På samme måde vil både elevers og læreres viden om et matematisk tema normalt være en sammensat størrelse. En del af den er knyttet til meget konkrete praksisformer, fx i dagligdagen (hvis man skal reducere fra A4 til A5 på kopimaskinen, passer 71 % nogenlunde) eller til bestemte opgavetyper (fx målforholdet som teknik ved arbejde med ligedannede trekanter). En del af den er tættere på den *officielle viden* (fx Thales' sætning i den udgave som er formuleret ovenfor). Men al viden er baseret på en forståelse af konkrete typer af praksis – hvis der ikke er tale om ren udenadslære.

Selvom endemålet for undervisningen således er en officiel, "generel" viden, så vil det ikke være tilstrækkeligt at læreren simpelthen meddeler den. Elevernes eget arbejde med konkrete situationer er en forudsætning for at den officielle viden kan gøres til en integreret (og ikke blot påklistret) del af deres *personlige viden*.

Det er her betydningen af "didaktiske miljøer" og andre af grundbegreberne i TDS kommer ind. For at give disse begreber kød og blod vil jeg nu beskrive en berømt undervisningssituation designet af Brousseau.

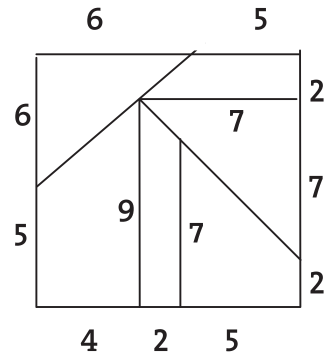
Puslespilssituationen

Denne situation indgår som nr. 37 i en sekvens af 65 situationer der overordnet set handler om decimaltal (Brousseau og Brousseau, 1988; jf. også kap. 4 i Brousseau, 1997). I nærværende artikel er pointen at situationen kan udvikle elevernes viden om ligedannethed.

For at gennemføre puslespilssituationen må eleverne have en vis erfaring med praktisk-geometrisk arbejde, herunder tegning og måling med lineal. De skal desuden være fortrolige med de fire regningsarter og til en vis grad med brøker og decimaltal. Der er i øvrigt tale om en klassetime hvor eleverne sidder i grupper på 4-5 elever, og hvor de har nem adgang til skriveredskaber, papir, linealer og sakse.

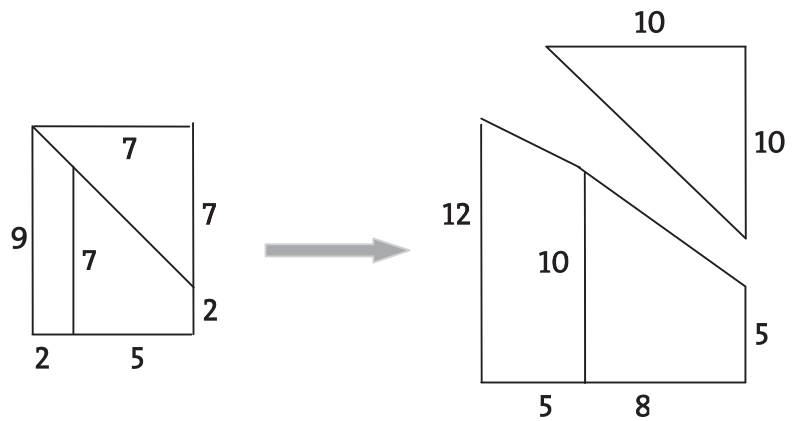
I timen skal eleverne arbejde med et puslespil som i figur 1; tallene på figuren angiver brikkernes størrelse i cm. Læreren har tegnet en "stor" model af det på tavlen (uden længdeangivelser) og har desuden forberedt en kuvert til hver gruppe som indeholder brikkerne til puslespillet med de rigtige mål.

Læreren starter med at vise eleverne puslespillet på tavlen og siger: *Om lidt får hver gruppe sit puslespil* (viser kuverterne og nogle af brikkerne). *En af brikkerne* (viser den på tavlen) *har en side der måler 4 cm. I skal nu lave en større udgave af dette puslespil hvor denne side måler 7 cm. Hver person i gruppen skal lave mindst én brik til puslespillet, eller to i en gruppe kan lave to sammen. Når I er færdige, skal I samle det nye puslespil.*



Figur 1. Et puslespil (Brousseau, 1997, s. 177).

Grupperne får nu udleveret deres puslespil og fordeler brikkerne mellem sig, evt. efter en kort diskussion. Brousseaus forsøg med situationen (på omkring 6. klassetrin) viser at de fleste elever konstruerer de nye brikker ved at lægge 3 cm til de sidemål som afmåles på de udleverede brikker (svarende til forlængelsen af 4 cm til 7 cm). Når grupperne skal samle brikkerne, passer de ikke sammen. Nogle af grupperne forsøger måske at "klippe de nye brikker til" så de passer bedre sammen; men det lykkes ikke rigtigt, og de synes nok også at det er lidt "snyd". Andre elever mener at de må have sjusket med målene eller lavet en eller anden regnefejl undervejs, og de begynder forfra med en eller flere brikker. Men problemet er der stadig. Flere bemærker som regel, at de nye brikker ikke engang passer "i kanten" af puslespillet. Læreren kan evt. støtte udviklingen af denne observation ved at foreslå grupperne at se på den del af puslespillet som er vist i figur 2.



Figur 2. Et udsnit af puslespillet "forstørret med 3 cm".

Det kan hjælpe eleverne med at identificere et principielt problem: En kant, som er sammensat af siderne i to brikker (fx "bunden" på 2 cm + 5 cm), bliver forstørret med 6 cm i alt. Men hvis samme kant blot er side i en enkelt brik (fx den øverste kant på 7 cm), bliver den forstørret med 3 cm. Det er altså antallet af brikker som støder op til en kant, der bestemmer hvor meget "kanten" bliver længere i forstørrelsen.[1]

Eleverne er nu klar over at deres strategi (at lægge 3 cm til alle sidelængderne) ikke vil lykkes uanset hvor nøjagtigt de måler, tegner og klipper. Der må findes en anden metode. En anden almindelig strategi som ofte kommer op nu (eller evt. fra starten), er baseret på at 7 er 1 mindre end det dobbelte af 4, så man skal blot tage 1 cm mindre end de dobbelte sidelængder når det store puslespil skal konstrueres. Brikkerne som konstrueres med denne metode, passer faktisk noget bedre sammen; men tydeligvis ikke nøjagtigt. Og igen kan man ved at kigge på udsnittet i figur 2 overbevise sig om at metoden har principielle problemer.[2]

Problemet er altså at opgaven indebærer at nogle længder skal forstørres på flere måder (samlet og i to eller flere dele). Og det skal give det samme resultat hvis puslespillet skal kunne samles.

Det kritiske punkt i situationen er nu nået: Eleverne har indset at opgaven ikke er så simpel som de først troede. Læreren kan på forskellig måde hjælpe til at få større overblik over problemet, uden at ødelægge det ved at give "svaret". Man kan fx, i det omfang ideen ikke allerede er opstået blandt eleverne, foreslå dem at lave en tabel der viser sidelængderne i det udleverede puslespil og i det nye, som i figur 3.

Små brikker	2 cm	4 cm	5 cm	6 cm	7 cm	8 cm	9 cm
Store brikker	?	7 cm	?	?	?	?	?

Figur 3. En tabel over sidelængder i puslespillene.

Den afgørende ide som gerne skulle opstå – og som kan forberedes eller fremmes på forskellige måder, fx vha. tabellen – er at tænke på enheden, 1 cm, som en længde alle længderne i tabellen er "sat sammen" af.[3] Hvis man ved hvordan den skal forstørres,

1 Matematisk note: Elevernes strategi for konstruktion af sidelængder i det forstørrede puslespil kan udtrykkes som $f(x) = x + 3$ hvor x er sidelængden på de udleverede brikker. Problemet er at denne funktion ikke er lineær, idet $f(a + b) \neq f(a) + f(b)$.

2 Matematisk note: Denne metode svarer til at konstruere de nye længder vha. funktionen $f(x) = 2x - 1$; men igen er $f(a + b) \neq f(a) + f(b)$.

3 Det er naturligvis et springende punkt hvordan denne idé "opstår", og her spiller de foregående 36 situationer en vigtig rolle i Brousseaus design. Fx drejer en af de tidligere situationer sig om hvordan man bestemmer tykkelsen af et ark papir. Her er "enheden" eksplicit men vanskelig at måle i praksis – og eleverne skal så udvikle ideen om at måle tykkelsen af fx 100 ark og derudfra bestemme tykkelsen af et enkelt stykke. At indføre tabellen i figur 3 er dog allerede et væsentligt skridt i retning af at stille det direkte spørgsmål: Hvad sker der med en længde på 1 cm? Men at "optimere" elevernes eget bidrag i situationen er til syvende og sidst lærerens opgave som må løses på basis af elevernes forudsætninger og reaktioner.

kan man også forstørre de øvrige – jf. hvad der ovenfor blev sagt om at forstørre en sidelængde i en og flere dele. Det ræsonnement som skal udvikles, er altså:

> Sidelængden på 4 cm er 4 gange enheden; sidelængden på 7 cm må derfor være 4 gange forstørrelsen af enheden. Forstørrelsen af enheden er derfor 7/4 cm, eller 1,75 cm.

Nu kan tabellen i figur 3 udfyldes ved at bruge første del af ovenstående ræsonnement med de øvrige sidelængder i første række i stedet for 4 cm. Denne metode skal naturligvis "verificeres" ved at konstruere nye brikker vha. tabellen og se at de passer sammen.

På baggrund af denne erfaring – som det formentlig vil tage mindst en lektion at udvikle – kan læreren afslutningsvis formulere et princip for forstørrelse: Sidelængderne skal ganges med en fast faktor. Man kan spørge: Hvorfor ikke bare sige det fra starten – ligesom jeg gjorde i forrige afsnit – hvorfor trække eleverne gennem denne frustrerende og måske ligefrem forvirrende oplevelse?

Svaret er naturligvis ikke at *al* officiel viden skal tilegnes gennem "discovery learning" hvor den gøres personlig gennem møjsommeligt arbejde med en konkret situation. Ikke desto mindre tyder den tilsyneladende sikkerhed hvormed mange elever umiddelbart vil bruge "lægge til"-modellen, på at vi i dette tilfælde har at gøre med en mere grundlæggende forhindring for den officielle viden. I modsætning til misforståelser som skyldes undervisningen opstår idéen om additiv forstørrelse nemlig *spontant* hos mange elever. En direkte meddelelse af den officielle viden vil dermed for en del elever installere en slags parallelviden; den "naturlige" strategi (forlæng alle stykker med den samme længde) forsvinder ikke nødvendigvis hvis man ikke har indset dens utilstrækkelighed. Den vil så dukke op i alle de situationer som man ikke umiddelbart forbinder med den officielle viden. Forhindringen må derfor overvindes ved at den personlige "viden" (som altså i dette tilfælde er forkert) udfordres og ændres i en konkret situation hvor den officielle viden præsenterer sig selv med en vis fornuftsmæssig *nødvendighed*. Den direkte meddelelse af den vil derimod basere sig på lærerens og fagets autoritet, og eleven vil da kun (måske) forbinde den med bestemte typer af skoleopgaver.

Teorien om didaktiske situationer

TDS handler grundlæggende om undervisningssituationer i matematik. Samspillet mellem lærere og elever kaldes en *didaktisk situation* under to forudsætninger:

- Læreren handler ud fra en intention om at eleverne lærer noget – ikke blot om at de skal lære "et eller andet"; lærerens intention omfatter en *tilsigtet matematisk viden*.

- Eleverne har på deres side en intention om at deltage i undervisningen.

Den didaktiske situation udfolder sig altså som et samspil mellem en lærer (evt. flere), en elevgruppe og den tilsigtede viden.

Undertiden arbejder eleverne på egen hånd i tilknytning til en didaktisk situation; de siges da at være i en *adidaktisk situation*. Adidaktiske situationer er således tæt knyttet til didaktiske situationer hvor læreren er i direkte samspil med eleverne.

Undervisningens bestanddele

Den simpleste form for didaktisk situation er at læreren meddeler den tilsigtede viden direkte til eleverne. Det vil læreren normalt gøre i det mindste i nogle faser af situationen. En sådan fase kaldes *institutionalisering*. For eleverne får den meddelte viden en officiel karakter i og med at den kommer fra institutionen, repræsenteret ved læreren.

I andre faser af undervisningen sætter læreren eleverne i gang med forskellige former for fagligt arbejde som hun ikke direkte er involveret i (fx opgaveregning). Man siger at læreren *devoluerer*[4] en arbejdsopgave til eleverne; man siger at læreren foretager en *devolution*. Herefter følger normalt en kortere eller længere adidaktisk situation hvor eleverne arbejder med opgaven.

Eleverne *handler* og *formulerer sig* efter bedste evne inden for de rammer som er fastlagt i devolutionsfasen. Der vil ofte være en del af formuleringerne som fremkommer i direkte samspil med læreren (fx når eleverne spørger om noget). Mens *handlingssituationer* er adidaktiske, vil *formuleringssituationer* altså kunne være såvel adidaktiske som didaktiske. Læreren kan således deltage direkte, fx med henblik på at tydeliggøre og fællesgøre elevernes formuleringer.

Det er selvfølgelig ikke nok at eleverne handler og formulerer sig. Eleverne ved selv at ikke alt er lige godt, specielt da ikke i faget matematik. Så før eller senere forventer de at der foretages en rationel *vurdering* af deres formuleringer. Man taler da om en *valideringssituation*, som normalt er didaktisk. Lærerens efterfølgende opsamling af den indvundne viden – som derved bliver fælles, officiel viden – er en vigtig form for institutionalisering.

Puslespilssituationen indeholder ganske klart disse elementer. Læreren *devoluerer* først opgaven med at forstørre puslespillet hvorefter eleverne er i en *adidaktisk situation*. De formulerer måske en første hypotese, men uanset om de har formuleret en fælles strategi, *handler* de på basis af en forestilling om en metode når de produ-

4 Ordet *devoluere* kan opfattes som modsat *involvere*. Når læreren devoluerer en arbejdsopgave, betyder det at hun *overgiver* arbejdet med den til eleverne og altså "ikke-involverer" sig – for en tid, forstås.

cerer de nye brikker. Behovet for at *formulere* sig omkring metoden opstår i hvert fald når de opdager at metoden ikke virker. Det kan fx ske ved at se på simplere dele af puslespillet, som vist i figur 2. Efter måske flere forsøg opstår elevernes ønske om validering eller evt. om institutionalisering af en "rigtig" metode. Læreren reagerer i første omgang på disse krav ved at *forstærke* formuleringssituationen, fx gennem forslaget om at repræsentere forstørrelsen af sidelængderne gennem en tabel (figur 3). Dette giver anledning til nye formuleringer og handlinger. Læreren afventer, så vidt muligt, at eleverne – som følge af deres egne handlinger og formuleringer – kan deltage i *valideringssituationen* hvor den korrekte metode genkendes. Metoden er fortsat knyttet til den devoluerede problemstilling men kan derpå *institutionaliseres* i sin officielle form (ved forstørrelse multipliceres sidelængderne med en fast faktor).

Uanset hvordan en didaktisk situation er bygget op, kan ovenstående begreber bruges til at genkende dens centrale faser. De kan godt komme i en anden rækkefølge eller fx blot bestå af institutionalisering. Der er således også tale om et sæt af analytiske begreber som beskriver den didaktiske situations mulige elementer. Det de udtrykker, vil være velkendt for enhver lærer. En pointe med at gøre beskrivelsen eksplicit er at et sådant begrebsapparat kan bidrage til at fremme den fælles forståelse af konkret, observeret undervisning (se fx Hersant & Perrin-Glorian, 2005).

Når det gælder *tilrettelæggelsen* af didaktiske situationer – og en dybere forståelse af betingelserne for deres succes – må vi have en mere præcis beskrivelse af hvad det vil sige at eleverne arbejder med den tilsigtede viden. Det didaktiske system vil jo kun i institutionaliseringsfasen indeholde den tilsigtede viden i officiel form; den faglige viden optræder i andre former i de øvrige faser af situationen. Jeg har allerede nævnt at dette kan være nødvendigt – nemlig når eleverne ikke umiddelbart kan tilegne sig den tilsigtede (officielle) viden.

Didaktiske miljøer

Ordet "miljø" bruges her i en overført betydning. En biologisk organisme udvikler sig gennem tilpasning til et miljø – og samtidig på basis af sine genetiske forudsætninger. På samme måde udvikler den menneskelige erkendelse sig i et komplekst samspil med det omgivende miljø samtidig med at der er visse regelmæssigheder knyttet til udviklingen af erkendelsen. Allerede Jean Piaget taler om erkendelsens tilblivelse – læring og kognitiv udvikling – med biologiske metaforer.

Selvom Piagets teorier er baseret på omfattende empiriske studier, er de naturligvis blevet kritiseret af eftertiden[5]. Og selvom en forståelse af hvordan mennesker

5 En del lærere vil have stiftet bekendtskab med Piagets teorier i deres læreruddannelse. Vi kan her hverken komme ind på detaljerne i disse teorier eller på den omtalte kritik (se fx Winsløw, 2006, kap. 5). Som det er antydet i citatet i introduktionen, er der en vis sammenhæng – og betydelige forskelle – mellem TDS og Piagets teorier.

lærer, naturligvis er af stor betydning i en didaktisk teori, så kan viden (eller teorier) om undervisning ikke direkte afledes af viden (eller teorier) om læring. Men Piagets centrale idé – at læring er en tilpasningsproces som både afhænger af omgivelserne og af individets aktive *konstruktion* af viden – har fået en blivende plads i den uddannelsesvidenskabelige tænkning om læreprocesser.

At læring afhænger af omgivelserne – miljøet – får en særlig betydning i forbindelse med undervisning i et fag som matematik. Matematiklæring sker jo ikke spontant i et "naturligt" miljø, når vi ser bort fra ganske simple erfaringer af logiske, geometriske og aritmetiske sammenhænge (som Piaget interesserede sig for). Undervisning består i en vis forstand i at etablere et "kunstigt miljø", i den hensigt at befordre læring af noget bestemt:

> I en undervisningssituation organiserer læreren et miljø, fx et problem, som mere eller mindre klart er motiveret af hendes intention om at formidle en bestemt viden til eleven, men som skjuler denne viden og det forventede resultat tilstrækkeligt til at eleven kun kan opnå det gennem en personlig tilpasning til det stillede problem. Værdien af den således opnåede personlige viden afhænger derfor af miljøets kvalitet som igangsætter af en virkelig, kontekstualiseret funktion af den tilsigtede viden, altså af graden af den opnåede adidaktiske forskydning. (Brousseau, 1989, s. 325; oversat fra fransk af CW)

Det er denne intention om elevernes læring af noget som fører til konstruktionen af et *didaktisk miljø*. Enhver undervisningssituation – fra det åbne projektarbejde til den institutionaliserende forelæsning – anbringer altså eleverne i et didaktisk miljø som giver bestemte betingelser for deres læring. Lærerens handlinger i den didaktiske situation drejer sig i høj grad om at etablere og ændre dette miljø.

Et didaktisk miljø har en *objektiv* dimension som i princippet hverken afhænger af lærerne eller eleverne. Det er denne del af miljøet som kan beskrives – sådan som jeg har gjort det i forbindelse med puslespilssituationen. Hertil hører fx de materielle genstande som handlinger udføres med, men også opgaver og instruktioner, matematiske repræsentationer mv. som fx indgår i formuleringssituationer. I puslespilssituationen indgår de udleverede brikker, papir, linealer mv. som materielle dele af miljøet som eleverne arbejder med i handlingssituationen, og til miljøet hører også lærerens instruktioner og puslespilsopgavens formulering (som i øvrigt udvikles undervejs, fx med indførelsen af tabeller som i figur 3).

Det didaktiske miljø har også en *subjektiv dimension* der bl.a. handler om de mere uudtalte spilleregler som gælder for aktørerne i miljøet (specielt eleverne). Selvom den subjektive dimension af miljøet er af stor betydning i praksis (og kan studeres nærmere, fx vha. begrebet *didaktisk kontrakt*, jf. fx Blomhøj, 1995 og Winsløw, 2006, afsnit 7.4), så ligger hovedinteressen i forbindelse med didaktisk design i beskrivelsen og udviklingen af det objektive miljø.

En meget væsentlig egenskab ved et didaktisk miljø er dets *adidaktiske potentiale*, dvs. de muligheder for selvstændigt elevarbejde som miljøet indeholder (jf. ovenstående citat). Og her er den nævnte skelnen mellem det objektive og det subjektive miljø væsentlig. Det objektive miljøs adidaktiske potentiale handler om rækkevidden og kvaliteten af de matematiske indsigter som miljøet og elevernes forudsætninger gør mulige. Det *realiserede* adidaktiske potentiale bestemmes selvfølgelig også af det subjektive miljø, og det viser sig ofte i forløbet af devolutions- og valideringsfaserne.

Det er vigtigt at understrege at selv det objektive miljø er en dynamisk størrelse som udvikles i løbet af den didaktiske situation – dels som funktion af lærerens (eller andres) planlægning af situationen, dels i forhold til situationens faktiske forløb. Man kan ikke på forhånd planlægge alle detaljer i elevernes arbejde i miljøet.

I beskrivelsen af puslespilssituationen har jeg da også været ret forsigtig med at sige at "eleverne gør sådan og sådan" som en slags automatisk reaktion i et givet miljø. Den større sammenhæng – herunder de didaktiske situationer som går forud – er betydningsfuld for den grad af stabilitet som kan observeres empirisk. Og i en sådan sammenhæng er elevernes læring langtfra tilfældig eller uforudsigelig.

Didaktisk ingeniørarbejde

Design af didaktiske situationer – og specielt planlagte objektive miljøer for læring – udgør således en af didaktikkens hovedopgaver. Det betyder ikke at al undervisning skal planlægges af matematikdidaktikere. I mange tilfælde vil didaktikerens design være lavet til brug under bestemte kontrollerede betingelser hvor man ønsker at undersøge bestemte didaktiske fænomener. Men netop når sådanne design er omhyggeligt dokumenterede, kan de faktisk udgøre produkter af didaktisk forskning og udvikling som er brugbare i den forstand at passende uddannede lærere kan tilpasse dem deres egen undervisningssammenhæng, videreudvikle dem etc.

I konkret brug af en didaktisk situation må man naturligvis tage hensyn til elevernes interesser og forudsætninger. Et væsentligt element i dokumentationen af et didaktisk design er således at præcisere hvordan situationen kan varieres uden at miste sine essentielle egenskaber. Den centrale, overordnede egenskab er naturligvis muligheden af at eleverne konstruerer den tilsigtede viden i det didaktiske miljø.

En nærmere beskrivelse af metoden i *didaktisk ingeniørarbejde* er givet af Artigue (1994). En vigtig pointe er det nære samarbejde mellem undervisere (i forsøgsklasserne) og matematikdidaktikere – både i design- og analysefaserne. Forbilledet er her Brousseaus eget forsøgscenter i Talence, med tilknyttet skole. Her var et stort antal forskere, ph.d.-studerende og lærere involveret i årelange studier af eksperimentelle undervisningsforløb. Den sekvens af situationer som puslespilssituationen indgår i, blev udviklet i denne sammenhæng – sammen med de grundlæggende dele af TDS.

Didaktiske miljøer i gymnasiet og på universitetet

TDS er oprindelig udviklet til og på basis af didaktiske design for matematikundervisning på grundskoleniveau. I dette afsnit antyder jeg hvordan TDS kan bruges på undervisning på gymnasie- og universitetsniveau, med udgangspunkt i et eksempel der matematisk set ligger i forlængelse af puslespilssituationen.

I forbindelse med den elementære trigonometri (typisk i 1. g) vil eleverne normalt bl.a. skulle lære om den såkaldte *sinusrelation* for vinklerne og siderne i en trekant:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Formlen præsenteres normalt som en teknik til brug for trekantsberegninger, og der præsenteres som regel også et bevis (arealet af trekanten kan udregnes som $\frac{1}{2}ac\sin B$, $\frac{1}{2}ab\sin C$ osv.). Den tilsigtede viden er her formlen og den nævnte tekniske brug. Men det er en interessant idé at overveje om forbindelserne til ligedannethed kunne give emnet et bredere matematisk indhold for eleverne og knytte det nærmere til elevernes viden om elementær geometri. Problemet som sinusrelationerne er en form for løsning af, kan derved komme til at antage en mere praktisk og personlig karakter for eleverne, så relationen ikke simpelthen bliver én blandt mange formler man i bedste fald kan "slå op" efter behov.

Thales' sætning er et specialtilfælde af sinusrelationen. Af denne følger jo

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b} \text{ og } \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c},$$

så hvis vinklerne i to trekanter er ens, står deres sider i samme forhold til hinanden, og omvendt.

Euklid (1904, bog VI) giver i sine *Elementer* et bevis for Thales' sætning som er noget mere indviklet end det bevis for sinusrelationerne som blev antydet ovenfor. Til gengæld bygger formlen for sinus i retvinklede trekanter – som benyttes i beviset for sinusrelationerne – på et specialtilfælde af Thales' sætning.

Eleverne i 1. g må antages at vide mere end elever i 6. klasse om puslespilssituationens problemstilling (herunder om hvordan man forstørrer en trekant). Fx omtales Thales' sætning (uden navn eller bevis) på s. 80 i en almindeligt brugt lærebog for gymnasiet (Carstensen og Frandsen, 1997), hvor sinusrelationen indføres på s. 187 (med bevis, men uden eksplicit sammenhæng til ligedannethed). Formlen for sinus i en retvinklet trekant fremsættes s. 185 (heller ikke her omtales sammenhængen til ligedannethed).

Man kan nu overveje om disse sammenhænge kan etableres tydeligere for eleverne gennem et objektivt miljø som har nogle af de ønskelige egenskaber som vi så i puslespilssituationen:

- Eleverne gives mulighed for at skaffe sig en vis fortrolighed med de problemer som den tilsigtede viden løser (her fx: Hvad kan man sige om en trekant hvis man kender dens vinkler?)
- I arbejdet med miljøet kan eleverne se relationer til, uddybe og bruge deres eksisterende viden (fx om ligedannethed), og miljøet får derved et betydeligt adidaktisk potentiale.
- Miljøet gør det muligt og nødvendigt at konstruere denne viden i det mindste i nogle specialtilfælde.

At konstruere et sådant objektivt miljø er en ægte matematikdidaktisk arbejdsopgave som jeg ikke vil ødelægge for læseren ved at fremkomme med en "løsning", der i øvrigt ikke ville have noget entydigt over sig.

Lad mig alligevel gøre et par almene bemærkninger som vedrører denne type af opgave. I den lidt videregående matematik, især i forbindelse med dens mere tekniske resultater som fx sinusrelationerne, kan det ofte være vanskeligt at tænke sig et didaktisk miljø som både har stort adidaktisk potentiale, og som samtidig med indre nødvendighed vil "tvinge" eleverne til at konstruere den tilsigtede viden.

En principiel mulighed der er af særlig betydning i netop denne sammenhæng, er de såkaldt *returnerede miljøer* (Bloch, 2005). Ideen er i korthed at man først devoluerer en adidaktisk situation med et "åbent" didaktisk miljø der tjener til at gøre eleverne fortrolige med problemstillingen gennem en ret fri udforskning af nogle specialtilfælde. Dernæst devolueres det *returnerede* miljø gennem en præcisering (måske endda indsnævring) af problemfeltet der stiller mere specifikke krav til arbejdets resultater. Bemærk at det didaktiske miljø i puslespilssituationen fra starten indeholder den afgørende betingelse for resultaterne (forstørrelsen af puslespillet skal kunne samles). Betingelsen kan kun opfyldes gennem konstruktion af den tilsigtede viden; der er således ikke behov for en returnering.

Problemet med den tilsigtede videns tekniske og teoretiske karakter bliver naturligvis endnu mere tydeligt når vi ser på universitetsniveauet. Men også her kan grundbegreberne fra TDS – herunder idéen om adidaktisk potentiale af didaktiske miljøer – bruges til at øge de studerendes muligheder for at tilegne sig personlig viden. Begrebet lineær afbildning kan, som jeg allerede har antydet, motiveres gennem arbejde med geometriske egenskaber (fx vinkelbevarelse) for afbildninger af planen ind i sig selv – evt. under anvendelse af computerstøttede visualiseringer. Hvilke matricer svarer mon til vinkelbevarende afbildninger? Og hvordan kan man beregne målforholdet (den faktor hvormed afbildningen forstørrer eller formindsker)? Hvad har målforhold at gøre med mål, fx Lebesguemålet? Se Dorier (2000) for en samling af didaktiske studier af lineær algebra og relationen til elementær geometri.

TDS har faktisk gennem en årrække været anvendt til eksperimentelle design også i den universitære matematikundervisning, specielt på de indledende trin. Artigue (1994) omtaler således et omfattende didaktisk ingeniørarbejde som havde til formål at skabe computerstøttede miljøer for førsteårsstuderendes arbejde med differentialligninger. Det kan også dreje sig om at etablere en såkaldt *videnskabelig debat* i forelæsninger for mange studerende (Legrand, 2001) eller om at stille mere avancerede tematiske opgavesæt inden for den matematiske analyses teori (Grønbæk og Winsløw, 2006). I alle disse tilfælde er de konkrete miljøers adidaktiske potentiale en hovedpointe. Når det forøges, muliggøres nye former og kvaliteter i undervisernes interaktion med de studerende.

Konklusion

Teorien om didaktiske situationer er af stor interesse for såvel lærere, læreruddannere og matematikdidaktikere (og kombinationer heraf). En almindelig kritik af matematikkens didaktik går på at feltet kun marginalt interesserer sig for almindelig undervisningspraksis, og at matematikdidaktiske resultater ikke er brugbare og bekendte for matematiklærere. Jeg finder at denne kritik i et vist omfang er berettiget, og at TDS repræsenterer et lovende redskab til at komme kritikerne i møde.

I dansk sammenhæng er der også praktiske grunde til afstanden mellem forskning og undervisningspraksis – specielt de institutionelle rammer for forskning og læreruddannelse til forskellige trin. Men selv under bedre institutionelle betingelser vil forskningen kun få betydning for praksis hvis den faktisk beskæftiger sig med praksis – og har effektive redskaber til at gøre det. Her er TDS et blandt flere tankevækkende bud.

Jeg har i denne artikel forsøgt at gøre de grundlæggende ideer i TDS så tydelige og praksisnære som muligt. Alligevel kan det ikke benægtes at teoriens tankegang og begreber kræver en vis tilvænning. At det er umagen værd, er der god evidens for fra de sammenhænge hvor TDS indtager en central plads i læreruddannelse, forskning og … undervisningspraksis.

Referencer

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. I: R. Biehler et al. (red.), *Didactics of Mathematics as a scientific discipline* (s. 27-39). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bloch, I. (2005). Dimension a-didactique et connaissance nécessaire: un exemple de 'retournement' de situation. I: M.-H. Salin et al. (red.), *Sur la théorie des situations didactiques* (s. 143-152). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Blomhøj, M. (1995). Den didaktiske kontrakt i matematikundervisningen. *Kognition og Pædagogik, 3*, s. 16-25.

Brousseau, G. (1989). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques, 9* (3), s. 309-336.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics 1970-1990* (oversat og redigeret af N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland og V. Warfield). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. & Brousseau, N. (1988). *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Bordeaux: IREM de Bordeaux.

Brousseau, G, Brousseau, N. & Warfield, V. (2001). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior, 20(3)*, s. 363-411.

Carstensen, J. & Frandsen, J. (1997). *Mat 1*. Aarhus: Systime.

Dorier, J.-L. (2000, red.). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Euklid (1994). *Euclide d'Alexandrie: les Éléments. Traduits du texte de Heiberg*, bind 2. Kommentar og oversættelse af Bernard Vitrac. Paris: Presses Universitaires de France.

Euklid (1904). *Euklids Elementer V-VI.* Oversat af Thyra Eibe. København: Nordisk Forlag.

Grønbæk, N. & Winsløw, C. (2006). Developing and assessing specific competencies in a first course on analysis. *Research in Collegiate Mathematics Education, 6* (in press).

Hersant, M. & Perrin-Glorian, M.-J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the theory of didactical situations. *Educational Studies in Mathematics, 59* no. 1-3, s. 113-151.

Legrand, M. (2001). Scientific debate in mathematics courses. I: D. Holton (red.), *Teaching and learning of mathematics at university level. An ICMI* study (s. 127-135). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Winsløw, C. (2004). Hvad skal vi med matematikdidaktikken? I: K. Schnack (red.), *Didaktik på kryds og tværs* (s. 325-344). København: DPU forlag.

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer: en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik*. Frederiksberg: Biofolia.

ZDM (2004). Citation for the 2003 ICMI Felix Klein Medal to Guy Brousseau. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 36(4)*, s. 126.